# Tentamen Vectoranalyse

24 augustus 2009, 14–17 uur (Examenhal)

Dit tentamen bestaat uit de volgende **vier** opgaven. Het maximale aantal punten is per opgave aangegeven. Je krijgt 10 punten gratis.

**Opgave 1 (25 pt.)**
Het boloppervlak $S$ in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, en $l$ is de lijn door het punt $(2, 0, 0)$ met richtingsvector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan $S$ in een punt $(x_0, y_0, z_0) \in S$.
2. Bereken de raakvlakken aan $S$ die de lijn $l$ bevatten.

**Opgave 2 (20 pt.)**
Bepaal de extrema van de functie $f$, gegeven door

$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{3}yz + \tfrac{1}{4}xz$$

onder de nevenvoorwaarde $x + y + z = 1$.

**Opgave 3 (20 pt.)**
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + axyz^3\mathbf{j} + bxy^2z^2\mathbf{k},$$

waarbij $a$ en $b$ reële getallen zijn.

1. Voor welke waarde(n) van $a$ en $b$ is $\mathbf{F}$ conservatief?
2. De cirkel $C$ is de snijkromme van het vlak met vergelijking $x + y + z = 0$ en de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Verder is $C_+$ is de kortste boog van $C$ van het punt $p = (\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6})$ naar het punt $q = (0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Bereken
$$\int_{C_+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

**Z.O.Z.**

**Opgave 4 (25 pt.)**
Op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ is het vectorveld $\mathbf{F}$ gegeven door

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{(x^2+2y^2+3z^2)^2}.$$

1. Toon aan dat de divergentie van $\mathbf{F}$ nul is.

Laat $D$ een begrensd gebied zijn in $\mathbb{R}^3$, waarvan de rand $\partial D$ een georiënteerd oppervlak is dat de oorsprong $(0,0,0)$ niet bevat.

2. Toon aan dat $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ als $(0,0,0) \notin D$.
3. Toon aan dat $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ als $(0,0,0) \in D$.
(Aanwijzing: merk op dat voor $\varepsilon > 0$ voldoende klein de ellipsoide $S_\varepsilon$, gegeven door $x^2+2y^2+3z^2 = \varepsilon^2$, binnen $D$ ligt. Toon eerst aan dat $\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.)